

## ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES (M11)

LICENCE DE SCIENCES - 1ÈRE ANNÉE

Janvier 2008

**Problème I.** On considère l'application  $f$  de  $\mathbb{R}^*$  dans  $\mathbb{R}$  définie par

$$f(x) = \frac{x}{(1 + e^{1/x})}, \quad (x \neq 0).$$

- 1) Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^*$ . Montrer qu'on peut prolonger  $f$  par continuité en 0. Ce prolongement (qui est donc une fonction continue sur  $\mathbb{R}$ ), sera encore noté  $f$  dans la suite.
- 2) Expliquer pourquoi  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$ . Montrer que  $f$  n'est pas dérivable en 0. Donner l'équation de la droite tangente à la courbe de  $f$  en  $x = 1$ .
- 3) Calculer les limites de  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .
- 4) Calculer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de  $e^u$ , puis le développement limité à l'ordre 2 en 0 de  $\frac{1}{1+e^u}$ .

En déduire un développement asymptotique à l'ordre 2 en  $+\infty$  et en  $-\infty$  de  $f(x)/x$ .

Montrer alors que  $f$  admet une asymptote en  $+\infty$  (respectivement en  $-\infty$ ), dont on déterminera l'équation et la position par rapport à la courbe  $f$ .

- 5) Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^*$  par

$$g(x) = 1 + e^{1/x} + \frac{1}{x} e^{1/x}.$$

Calculer  $g'(x)$  ( $x \in \mathbb{R}^*$ ), et donner les variations de  $g$ . En déduire le signe de  $g(x)$  en fonction de  $x$ , puis les variations de  $f$  (on présentera ces résultats dans un même tableau).

- 6) L'application  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  est-elle bijective?
- 7) **Facultatif.** Donner l'allure de la courbe de  $f$ .

### Exercice II.

On considère la suite définie de la façon suivante

$$\begin{cases} u_0 = a, \\ u_1 = b, \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}(3u_n - u_{n-1}), \quad n \in \mathbb{N}^*, \end{cases}$$

$a$  et  $b$  étant deux nombres réels fixés.

- 1) Pour tout entier naturel  $n$  non nul, exprimer  $u_{n+1} - u_n$  en fonction de  $u_n - u_{n-1}$ . En déduire que  $u_{n+1} - u_n$  est toujours du signe de  $u_1 - u_0 = b - a$ , puis en déduire:

- $(u_n)_n$  est stationnaire, si  $a = b$
- $(u_n)_n$  est strictement croissante, si  $b > a$ ,
- $(u_n)_n$  est strictement décroissante, si  $b < a$ .

2) On fixe maintenant  $a = 2$  et  $b = 1$ .

i) Exprimer  $u_n - u_{n-1}$  en fonction de  $n$ , pour tout entier  $n$  non nul.

ii) En déduire l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .

*Indication: On pourra par exemple utiliser l'égalité*

$$u_n - u_0 = (u_n - u_{n-1}) + (u_{n-1} - u_{n-2}) + \cdots + (u_1 - u_0) ,$$

et le rappel suivant: La somme des  $n - 1$  premiers termes d'une suite géométrique  $(w_n)_n$  de raison  $r$  et de premier terme  $w_0$  est

$$\sum_{n=0}^{n-1} w_n = w_0 \frac{1 - r^n}{1 - r} .$$

Montrer alors que  $(u_n)_n$  est convergente et calculer sa limite.

**Exercice III.** Soit le polynôme

$$P(x) = x^4 - 4x^2 - x + 1 .$$

1) Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x)$ ,  $P(-1)$ ,  $P(0)$ ,  $P(1)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x)$ .

2) Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires; en déduire que l'équation  $x^4 - 4x^2 - x + 1 = 0$  admet exactement quatre racines réelles distinctes (on ne cherchera pas à les calculer).

**Exercice IV.**

1) Rappeler la définition de la fonction  $\arctan(x)$ .

2) Calculer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de  $\arctan(x)$ . Calculer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de

$$\frac{1}{1 - \arctan(x)} .$$