Quelques exercices

Dans tous les exercices qui suivent, $\mathfrak{H}$ est un espace de Hilbert.

Exercice 1. Soit A un opérateur non borné sur $\mathfrak{H}$, de domaine $\mathcal{D}(A)$ dense dans $\mathfrak{H}$. Montrer que $(\mathrm{Im} A)^\perp = \mathrm{Ker}(A^*)$

Exercice 2. Montrer que $(-\Delta,\ C_0^\infty(\mathbb{R}^3))$ n'est pas fermé sur $\mathfrak{H} = L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$.

Exercice 3. Soit A un opérateur auto-adjoint sur $\mathfrak{H}$. Montrer que deux vecteurs propres de A associés à deux valeurs propres distinctes (s'il y en a) sont orthogonaux.

Exercice 4. Soit A l'opérateur non borné sur $L^2(\mathbb{R})$ défini par $(Af)(x) = xf(x)$.

Montrer que $\sigma(A) = \mathbb{R}$.

Exercice 5. Montrer que $\sigma(-\Delta) = [0, +\infty[$.

Exercice 6. Soit (a_i) une suite de $\ell^2(\mathbb{Z})$ telle que pour tout i, $0 < a_i < 1$ et telle que l'ensemble des a_i est dense dans l'ensemble [0, 1]. Soit T l'opérateur de $\ell^2(Z)$ dans $\ell^2(\mathbb{Z})$ défini par $(x_i)_i \mapsto (a_i x_i)_i$. Montrer que T est auto-adjoint. Déterminer $\sigma(T)$. Montrer que T^{-1} existe (T injectif) mais que T^{-1} n'est pas borné.

Exercice 7. Soit R la résolvante d'un opérateur autoadjoint $H = H^*$. En utilisant la première équation de la résolvante, montrer que R est continue sur $\rho(H)$.

Exercice 8. Soient P_1 et P_2 deux projecteurs orthogonaux. Montrer que si $\|P_1 - P_2\| < 1$ alors $\dim(\mathrm{Im} P_1) = \dim(\mathrm{Im} P_2)$.

Exercice 9. Soit H_0 un opérateur auto-adjoint et soit V un opérateur symétrique et relativement H_0-borné, de borne relative b.
i) Montrer que si $b < 1$, il existe $c \geq 0$ tel que pour tout $u \in \mathcal{D}(H_0)$,

$$\|Vu\| \leq \frac{b}{1-b} \|(H_0 + V)u\| + c\|u\| \,.$$

ii) Montrer que pour tout $z \in \rho(H_0)$, $V(H_0 - z)^{-1}$ est borné et que si $b < 1$, $V(H_0 + V - z)^{-1}$ est aussi borné.

Exercice 10. Supposons A_0 inversible, avec A_0^{-1} borné, et soit B un opérateur fermé, avec B relativement A_0-borné.

Montrer que pour tout λ assez petit, $(A_0 + \lambda B)$ est inversible, d'inverse borné, et que l'on a alors la série de Born

$$(A_0 + \lambda B)^{-1} = A_0^{-1} \left(\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} (-\lambda)^k (B A_0^{-1})^k \right) .$$

Exercice 11. Soit $A = A^*$ un opérateur auto-adjoint, et B un opérateur symétrique et borné, de norme $\|B\|$. Montrer que

$$\sigma(A + B) \ \subset \ \sigma(A) \ + \ [\, -\|B\|, \, +\|B\| \,] \, ,$$

où dans le membre de droite, il s'agit de la somme d'ensemble

$$\sigma(A) \ + \ [\, -\|B\|, \, +\|B\| \,] = \{ \ a + b \mid a \in \sigma(A), \ b \in [\, -\|B\|, \, +\|B\| \,] \ \} \, .$$

Exercice 12. Montrer que l'inégalité d'opérateurs $|A + B| \leq |A| + |B|$ est fausse en général.

Exercice 13. Soit $\mathfrak{H} = L^2(\mathbb{R}^3)$, $A = -\Delta$, $\mathcal{D}(A) = H^2(\mathbb{R}^3)$ et pour $Z > 0$ fixé, $B = \frac{Z}{|x|}$ (B est un opérateur de multiplication). On sait que $(A, \mathcal{D}(A))$ est auto-adjoint. Soient B_1 et B_2 tels que $B = B_1 + B_2$, où

$$B_1 = \frac{Z}{|x|} 1\!\!1_{|x| > \alpha}(x), \text{et } B_2 = \frac{Z}{|x|} 1\!\!1_{|x| \leq \alpha}(x).$$

i) Montrer qu'il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(A)$,

$$\|\varphi\|_{L^\infty} \leq \|\hat{\varphi}\|_{L^1} \leq c(\|\varphi\|_{L^2} + \|\Delta\varphi\|).$$

En déduire qu'il existe $\alpha_0 > 0$, $1 > a > 0$ et $b > 0$ tels que pour tout $\alpha < \alpha_0$, et pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(A)$,

$$\|B_2 \varphi\|_{L^2} \leq b\|\varphi\|_{L^2} + a\|A\varphi\|_{L^2}$$

ii) Montrer alors que B est relativement borné par rapport à A, de borne relative $a < 1$. En déduire que $A + B$ est auto-adjoint sur $\mathcal{D}(A)$.
iii) Montrer que $\psi_0(x) = \frac{Z^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{8\pi}} \mathrm{e}^{-Z|x|/2} \in \mathcal{D}(A)$, et que ψ_0 est solution de

$$(A + B)\Psi_0 = \lambda_0 \Psi_0,$$

pour un λ_0 que l'on déterminera.

Exercice 14. Soit V une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, pŕiodique, de période 1. On considère l'opérateur

$$H = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \; + \; V(x) \quad \text{sur } L^2(\mathbb{R})\,.$$

i) Montrer que $(H,\, H^2(\mathbb{R}))$ est auto-adjoint ($H^2(\mathbb{R})$ est l'espace de Sobolev $W^{2,2}(\mathbb{R})$.)
ii) On considère l'opérateur de translation τ défini sur $L^2(\mathbb{R})$ par $\tau\psi(x) = \psi(x-1)$. Démontrer que $\tau H = H\tau$ et que $\tau^*\tau = \mathrm{Id}_{L^2(\mathbb{R})}$.

iii) On va montrer que $\sigma_d(H) = \emptyset$. Pour cela, on commence par supposer qu'au contraire, il existe $\lambda \in \sigma_d(H)$.

a) On note $E_\lambda = \mathrm{Ker}(H-\lambda)$. Montrer que $\tau E_\lambda \subset E_\lambda$.

b) Montrer que la restriction de τ à E_λ admet une valeur propre de module 1. Montrer que la fonction propre associée ne peut pas être dans $L^2(\mathbb{R})$. Conclure.

Exercice 15. Dans tout l'exercice, $\|.\|$ est la norme usuelle sur $L^2(\mathbb{R}^3)$.
1) On considère l'opérateur énergie cinétique pour un électron :

$$-\Delta \text{ sur } L^2(\mathbb{R}^3)$$

et l'opérateur V, énergie potentielle coulombienne d'interaction avec un noyau statique et ponctuel

$$V(x) = -\frac{Z}{|x|}, \;\; \text{opérateur de multiplication sur } L^2(\mathbb{R}^3)\;.$$

Montrer pour $\psi \in H^2(\mathbb{R}^3)$

$$2\langle \psi,\; \frac{1}{|x|}\psi\rangle = \sum_{j=1}^{3} \langle \psi,\; [\partial_{x_j},\; \frac{x_j}{|x|}]\,\psi\rangle \leq 2\sum_{j=1}^{3} |\langle \partial_{x_j}\psi,\; \frac{x_j}{|x|}\rangle|\;,$$

où $[A,\, B] := AB - BA$ est le commutateur de B et de A.

En déduire le principe d'incertitude de Coulomb

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x|}|\psi(x)|^2 \mathrm{d}x \leq \|\nabla\psi\|\,\|\psi\|\;.$$

2) Pour tout $\psi \in H^2(\mathbb{R}^3)$, on considère l'énergie

$$\mathcal{E}(\psi) = \langle \psi, (-\Delta + V(x))\psi\rangle\;.$$

A l'aide du principe d'incertitude de Coulomb, montrer que l'on a

$$\inf_{\psi\in H^2,\; \|\psi\|} \mathcal{E}(\psi) \geq -\frac{Z^2}{4}\;.$$

3) Soit

$$\psi_0(x) = \frac{Z^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{8\pi}} \mathrm{e}^{-Z|x|/2} \ .$$

Montrer que $\|\psi_0\| = 1$, $\psi_0 \in H^2(\mathbb{R}^3)$, et

$$(-\Delta + V)\psi_0 = -\frac{Z^2}{4}\psi_0.$$

En déduire

$$\inf \, \sigma(-\Delta + V) = \inf \, \sigma_p(-\Delta + V) = -\frac{Z^2}{4} \ .$$