**Université de Toulon**
M1 MEEF Mathématiques.

TD 3 - Variables aléatoires - Théorème de transfert

Le cours

- **Applications mesurables.** Soient $(\Omega,\, \mathfrak{F})$ et $(\Omega',\, \mathfrak{F}')$ deux espaces mesurables. Une application $f$ de $(\Omega,\, \mathfrak{F})$ dans $(\Omega',\, \mathfrak{F}')$ est mesurable si $f^{-1}(\mathfrak{F}') := \{f^{-1}(B),\, B \in \mathfrak{F}'\} \subset \mathfrak{F}$.

  Dans le cas particulier où $(\Omega',\, \mathfrak{F}') = (\mathbb{R}^d,\, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ étant la tribu de Borel (i.e. la tribu engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}^d$), on dit que $f$ est *borélienne.*

  Remarques : Dans la suite, on se restreindra toujours aux deux cas particuliers suivants :
  — $\Omega'$ est fini ou dénombrable et $\mathfrak{F}' = \mathcal{P}(\Omega')$, ensemble des parties de $\Omega'$.
  — $\Omega' = \mathbb{R}^d$ et $\mathfrak{F}' = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ est la tribu de Borel sur $\mathbb{R}^d$.
- **Variables aléatoires.** Toute application mesurable définie sur un espace de probabilité $(\Omega,\, \mathfrak{F},\, P)$ est appelée *variable aléatoire*. Une variable aléatoire qui prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$ est appelée *variable aléatoire réelle*. Une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est appelée *vecteur aléatoire.*

  Les variables aléatoires sont usuellement notées $X$, $Y$, $Z$, $T$, $U$.
- **Probabilité image.** Soit $X$ une variable aléatoire de $(\Omega,\, \mathfrak{F},\, P)$ dans $(\Omega', \mathfrak{F}')$. On appelle probabilité image de $X$, la probabilité notée $P_X$, définie sur $(\Omega', \mathfrak{F}')$ par

$$P_X(B) := P(X^{-1}(B)) = P(X \in B),\; B \in \mathfrak{F}'\,.$$

  $P_X$ est aussi appelée *loi de* $X$.

  Remarque importante : On verra que dans la plupart des problèmes rencontrés, académiques ou pas, il est inutile de connaître la probabilité $P$, et la connaissance de la loi $P_X$ de $X$ suffit. C'est d'ailleurs une des raisons essentielles d'introduire la notion de variable aléatoire.
- **Fonction de répartition.** Soit $X$ une variable aléatoire réelle sur $(\Omega,\, \mathfrak{F},\, P)$. On appelle *fonction de répartition* de $X$ l'application $F_X$ de $\mathbb{R}$ dans $[0,\, 1]$ définie par

$$F_X(s) := P(X \leq s) = P_X(]-\infty,\, s])\,.$$

  La fonction de répartition est une application croissante et continue à droite en tout point. De plus, deux variables aléatoires ont même loi si et seulement si elles ont même fonction de répartition. On verra qu'une fonction de répartition n'est pas nécessairement continue. Par exemple, s'il existe $x_0$ tel que $P_X(\{x_0\}) \neq 0$ alors $F_X$ n'est pas continue en $x_0$ (c.f. exercice 1). Par contre, si $X$ est une variable aléatoire à densité, on verra que $F_X$ est continue sur $\mathbb{R}$.

  *La partie de cours ci-dessous n'est pas exigible pour l'examen et le concours. Cependant, elle conditionne les définitions d'espérance et variance que nous reverrons dans l'étude des variables aléatoires réelles discrètes et des variables aléatoires à densité.*
- **Théorème de transfert.** Soit $X$ une variable aléatoire réelle sur $(\Omega,\, \mathfrak{F},\, P)$, et soit $f$ une fonction borélienne, alors

$$\int_\Omega f(X(\omega))\,\mathrm{d}P(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}P_X(x)\ .$$

  Ce théorème permet de ramener l'intégration par rapport à la mesure abstraite $P$ à une intégration par rapport à la mesure réelle $P_X$.

  L'énoncé de ce théorème est important pour comprendre, par exemple, en quoi la définition d'espérance est la même dans le cas de probabilités discrètes et de probabilités à densité. Ce théorème n'est pas exigible. Nous l'utiliserons dans le cas particulier de *variables aléatoires discrètes* et *variables aléatoires à densité.* Pour les variables aléatoires discrètes, respectivement à densité, l'intégrale dans le membre de droite sera une somme ou une série, respectivement une intégrale “usuelle” (intégrale de Lebesgue ou de Riemann généralisée).

  A l'aide du théorème de transfert, on définit les quantités suivantes :

L'*espérance* d'une variable aléatoire $X$ est

$$\mathrm{E}(X) = \int_\Omega X(\omega)\,\mathrm{d}P(\omega).$$

Plus généralement, on définit, si $f(X)$ est intégrable,

$$\mathrm{E}(f(X)) = \int_\Omega f(X(\omega))\,\mathrm{d}P(\omega).$$

Dans les deux cas (v.a.r. discrète ou v.a.r. à densité), le calcul se fait à l'aide du théorème de transfert.

On notera comme cas particulier de l'égalité précédente

$$\mathrm{E}(\mathbb{1}_A(X)) = P_X(A)\,,$$

où $\mathbb{1}_A$ est la fonction caractéristique de l'ensemble $A$, c'est à dire $\mathbb{1}_A(\omega)$ vaut 1 si $\omega \in A$ et vaut 0 sinon.

La linéarité de l'intégrale implique la linéarité de l'espérance :

$$\mathrm{E}(aX + bY) = a\mathrm{E}(X) + b\mathrm{E}(Y)\,.$$

La *variance* d'une variable aléatoire $X$ est

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}((X - \mathrm{E}(X))^2)\,.$$

- **Indépendance de variables aléatoires.** Soient $X_1$, $X_2$, ..., $X_n$, $n$ variables aléatoires réelles sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$. On dit que $X_1$, $X_2$, ..., $X_n$ sont indépendantes si, quels que soient $B_1$, $B_2$, ... $B_n$ éléments de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a

$$P(X_1 \in B_1,\, X_2 \in B_2, \cdots, X_n \in B_n) = P(X_1 \in B_1)\, P(X_2 \in B_2) \cdots P(X_n \in B_n)\,.$$

Si $X_1$, $X_2$, ..., $X_n$ indépendantes, alors $g_1(X_1)$, $g_2(X_2)$, ... $g_n(X_n)$ sont aussi indépendantes, pour toutes fonctions boréliennes $g_1$, $g_2$, ..., $g_n$.

(c.f. paragraphe sur les vecteurs aléatoires pour une caractérisation de l'indépendance à l'aide de l'espérance).

Les exercices

**Exercice 1.** Soit $X$ une variable aléatoire réelle de fonction de répartition $F_X$. Montrer que $F_X$ est continue à droite en tout point. Montrer que $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$.

Soit $X$ une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ telle que $P_X(\{0\}) = P_X(\{1\}) = 1/2$. Montrer que la fonction de répartition $F_X$ de $X$ n'est pas continue à gauche en tout point.

**Exercice 2.** Soit $X$ une variable aléatoire réelle telle que $X$ et $2X$ admettent la même fonction de répartition. Montrer que $X = 0$ presque sûrement.

**Exercice 3.** Démontrer la formule de Koenig : $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2$.

**Exercice 4.** Soit $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$. Déterminer la fonction de répartition de $Y = aX + b$ en fonction de celle de $X$.

**Exercice 5.** Soit $X$ une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ et $F_X$ sa fonction de répartition. On suppose $F_X$ continue et strictement croissante. Montrer que

$$F_{F_X\circ X}(s) = \begin{cases} 0, & \text{si } s \le 0 \\ s, & \text{si } 0 \le s \le 1 \\ 1, & \text{si } 1 < s \end{cases}$$

**Exercice 6** (Quantiles)**.** Soit $X$ une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$. On appelle *quantile* d'ordre $\alpha$ de $X$ l'ensemble

$$I_\alpha := \{x \in \mathbb{R} \mid \lim_{\epsilon\to0^+} F(x-\epsilon) \le \alpha \le F(x)\}\,.$$

Montrer que $I_\alpha$ est un intervalle. Montrer que pour tout $\alpha \in ]0,\,1[$, $I_\alpha$ est non vide. Montrer que $I_\alpha$ est réduit à un point si $F$ est strictement croissante (les quantiles d'ordre $\alpha = 1/4$ ou $1/2$ ou $3/4$ sont appelés *quartiles*).