Théorie de la mesure et de l'intégration (semestre 5)
U.F.R. Sciences & Techniques

L3 Mathématiques (2018-19)

Cours: J.-M. Barbaroux. *Travaux dirigés:* J.-M. Barbaroux
email: barbarou@univ-tln.fr *web:* http://barbarou.univ-tln.fr

---

1. Révisions (niveaux L1 et L2)

Exercice 1.1 (Quelques trivialités niveau L1).
i) Soient $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de sous-ensembles d'un ensemble X. Montrer que

$$\overline{\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k} = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \overline{A_k} \quad \text{et} \quad \overline{\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \overline{A_k}.$$

ii) Quel est le problème avec l'écriture $A\cup B\cap C$?

Exercice 1.2 (Ensemble des parties d'un ensemble). *Soit $\{0,\,1\}^X$ l'ensemble de toutes les applications de X dans $\{0,\,1\}$. Montrer que $\{0,\,1\}^X$ est en bijection avec l'ensemble $\mathcal{P}(X)$ de toutes les parties de X. En déduire le cardinal de $\mathcal{P}(X)$ si X est un ensemble fini.*

Exercice 1.3 (Image réciproque).
i) Rappeler la définition de l'image réciproque $f^{-1}(B)$ d'un ensemble $B\subset Y$ par une application $f: X\to Y$.
ii) Soient X et Y deux ensembles quelconques et f une application de X dans Y. Soient B, B_1 et B_2 trois sous-ensembles quelconques de Y. Montrer:

$$f^{-1}(B_1\cup B_2) = f^{-1}(B_1)\cup f^{-1}(B_2)\,,$$
$$f^{-1}(B_1\cap B_2) = f^{-1}(B_1)\cap f^{-1}(B_2)\,,$$
$$f^{-1}(B^c) = \left(f^{-1}(B)\right)^c\,,$$

où l'exposant ^{c} désigne le complémentaire.
iii) Soit $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de fonction définie sur un même domaine de X, et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On note $\inf f_k$ la fonction définie par $(\inf f_k)(x) = \inf_k f_k(x)$. Montrer:

$$(\inf f_k)^{-1}\left(]-\infty, a[\right) = \bigcup_k f_k^{-1}(]-\infty, a[)$$

Exercice 1.4 (Interversion limite et intégrale). *On rappelle le théorème usuel sur l'interversion de limite et d'intégrale pour les intégrales de Riemann.*

Théorème: *Soit $[a,\,b]\subset\mathbb{R}$ un intervalle fermé borné. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $[a,\,b]$. On suppose*

(1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a, b]$
(2) La suite (f_n) converge uniformément vers une fonction f.
Alors

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\, dx = 0.$$

---

i) Rappeler la définition de convergence uniforme pour une suite de fonctions

ii) Montrer que la conclusion du théorème implique

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx$$

iii) Donner un exemple de suite de fonctions (g_n) qui converge simplement vers une fonction g sur un intervalle fermé borné, mais ne converge pas uniformément vers une fonction g.
iv) Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ toutes définies sur $[0, 1]$ par

$$f_n(x) = nx(1 - x^2)^n.$$

Montrer qu'il existe une fonction f définie sur $[0, 1]$ telle que pour tout $x \in [0, 1]$, on a $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.
Montrer que $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx$. En déduire que la convergence de f_n vers f n'est pas uniforme.
Est-il correct d'affirmer: "si (f_n) tend simplement vers f mais ne tend pas uniformément vers f, alors $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx \neq \int \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx$"? (expliquer)
v) Soit la suite de fonctions h_n ($n \in \mathbb{N}$), définies sur l'intervalle $[0, 2]$ par

$$h_n(x) = \frac{1}{x^n + e^x}.$$

Montrer qu'il existe une fonction h définie su $[0, 2]$ telle que pour tout $x \in [0, 2]$, $\lim_{n\to\infty} h_n(x) = h(x)$. La fonction h est-elle continue?
Peut-on appliquer directement le théorème ci-dessus à la suite de fonctions $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour conclure qu'on a le droit d'intervertir limite et intégrale? Pourquoi?
vi) Considérons, pour $\epsilon \in (0, 1/2)$ fixé les trois intervalles suivants: $I_1(\epsilon) = [0, 1 - \epsilon]$, $I_2(\epsilon) = [1 - \epsilon, 1 + \epsilon]$ et $I_3(\epsilon) = [1 + \epsilon, 2]$. Pour $\epsilon \in (0, 1/2)$ fixé, peut-on appliquer le théorème sur $I_1(\epsilon)$? sur $I_3(\epsilon)$? Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\left| \int_{I_2(\epsilon)} h_n(x)dx \right| \leqslant 2\epsilon.$$

Avec ce qui précède conclure que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^2 h_n(x)dx = \int_0^2 \lim_{n\to\infty} h_n(x)dx = 1 - e^{-1}.$$

[On verra par la suite que la théorie de l'intégrale de Lebesgue permet de conclure bien plus rapidement grâce au théorème de convergence dominée]

Exercice 1.5. *Montrer que l'intégrale de Riemann généralisée suivante converge*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx.$$

Exercice 1.6 (Dénombrabilité). *On rappelle qu'un ensemble X est dénombrable si on peut construire une* bijection *de X dans $\mathbb{N}$ ("dénombrable infini"). Une définition non équivalente, que nous n'utiliserons pas, correspondant à "infini dénombrable ou fini" est qu'il existe une* injection *de X dans $\mathbb{N}$.*

i) Montrer que $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}^2$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables.

ii) Montrons par l'absurde que $[0, 1]$ n'est pas dénombrable. Supposons qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $[0,1] = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit $I_0 = [0,1]$. On construit une suite d'intervalle fermés non vides I_n de la façon suivante: si $x_n \notin I_n$, alors on pose $I_{n+1} = I_n$. Sinon, on prend pour I_{n+1} un intervalle fermé non vide tel que $I_{n+1} \subset I_n$ et I_{n+1} ne contient pas x_n.

ii-a) Que peut-on dire de l'ensemble $I_\infty = \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n$ (se rappeler du théorème des segments emboîtés).

ii-b) Soit $x \in I_\infty$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \neq x_n$.

ii-c) Conclure que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Exercice 1.7.

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. On définit la limite supérieure et la limite inférieure de cette suite par

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\geq n} a_k\right) \quad et \quad \limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{k\geq n} a_k\right)$$

i) Montrer que la limite supérieure et la limite inférieure d'une suite sont toujours bien définies dans $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\cup\{-\infty\}\cup\{+\infty\}$.

ii) Construire un exemple de suite pour lequel la limite inférieure est différente de la limite supérieure.

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ensembles de $\mathbb{R}$. On définit

$$\limsup A_n = \bigcap_{n\geq 0}\bigcup_{k\geq n} A_k \quad et \quad \liminf A_n = \bigcup_{n\geq 0}\bigcap_{k\geq n} A_k$$

iii) Expliquer pourquoi $\limsup A_n$ est aussi appelé "ensemble des éléments infiniment souvent dans les A_n" (ou encore "A_n-infiniment souvent").

iv) Calculer les $\limsup$ et $\liminf$ pour les suites d'ensembles suivantes:

iv-a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n =]-\infty, a_n]$, où $a_{2n} = 1 + 1/(2n)$ et $a_{2n+1} = -1 - 1/(2n+1)$.

iv-b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $B_{2n} =]0, 3 + 1/(2n)[$ et $B_{2n+1} =]-1-1/(3n), 2]$.

iv-c) Pour $n \in \mathbb{N}$, $C_n = [\cos(n) - 1, \cos(n) + 1]$.

v) Soit $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite quelconque d'ensembles de $\mathbb{R}$. Montrer que $(\limsup_{n\to+\infty} A_n)^c = \liminf_{n\to+\infty}(A_n^c)$. Y-a-t-il une inclusion entre $(\limsup D_n)^c$ et $\limsup(D_n^c)$? Est-ce que l'inclusion peut être stricte?

Exercice 1.8 (Semi-continuité). *Soit $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$.*
La fonction f est dite semi continue inférieurement ***(s.c.i.)*** *en $x_0 \in \mathcal{D}(f)$ si:*

Pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $(|x_0 - x| < \delta$ et $x \in \mathcal{D}(f)) \ \Rightarrow\ (f(x) \geqslant f(x_0) - \epsilon)$.

[Pour la définition de semi-continuité supérieure ***(s.c.s.)****, on écrit $(f(x) \leqslant f(x_0) + \epsilon)$.]*
Montrer que la fonction partie entière de x, $f(x) = \lfloor x \rfloor$ est s.c.s. On commencera par rappeler la définition de f. Montrer qu'il existe des points de $\mathbb{R}$ où cette fonction n'est pas s.c.i.
*[*Un exercice de topologie en passant qui nous sera utile:*]*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction s.c.i.
Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'ensemble $f^{-1}(]\alpha, +\infty[)$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

---

2. Mesures extérieures - ensembles mesurables

Exercice 2.1. *Soit μ une mesure extérieure sur un ensemble X. Montrer que tout ensemble $A \subset X$ μ-négligeable (i.e., tel que $\mu(A) = 0$) est μ-mesurable*

Exercice 2.2. *Soit μ une mesure extérieure sur un ensemble X. Montrer que si A est négligeable alors pour tout $B \subset X$, on a*

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B).$$

Exercice 2.3. *Soit μ une mesure extérieure. Montrer que s'il existe un ensemble A non μ-mesurable, alors on peut construire deux ensembles A_1 et A_2 tels que*

$$A_1 \cap A_2 = \emptyset \quad \text{et} \quad \mu(A_1 \cup A_2) < \mu(A_1) + \mu(A_2).$$

Exercice 2.4. *Soit μ une mesure extérieure sur un ensemble X, soit $A \subsetneq X$ et soit $\nu = \mu \restriction_A$ la restriction de l'application μ à l'ensemble A, i.e., $\nu(B) = \mu(A \cap B)$. Montrer que ν est une mesure extérieure sur A.*

Exercice 2.5. *On rappelle que si μ est une mesure extérieure sur X et si $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite d'ensembles μ-mesurables et deux à deux disjoints, alors*

$$\mu\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mu(A_k).$$

i) Montrer que si $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite d'ensembles μ-mesurables alors

$$(B_0 \subset B_1 \subset B_2 \subset \cdots \subset B_k \subset \cdots) \quad \Rightarrow \quad \mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n).$$

ii) Montrer que si $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite d'ensembles μ-mesurables alors $(D_0 \supset D_1 \supset D_2 \supset \cdots \supset D_k \supset \cdots$ et $\mu(D_0) < +\infty)$ impliquent $\mu\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} D_k\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(D_n)$.

Exercice 2.6. *Soit X un ensemble quelconque et soit $x_0 \in X$ fixé. Soit δ_{x_0} l'application définie sur $\mathcal{P}(X)$ par:*

$$\delta_{x_0}(A) = \begin{cases} 1 & \textit{si } x_0 \in A \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$$

Montrer que δ_{x_0} est une mesure extérieure (on l'appelle ***mesure de Dirac*** *au point x_0). Déterminer les ensembles μ-mesurables.*

Exercice 2.7. *On considère l'application μ de $2^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}_+$ définie par*

$$\mu(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}*} \delta_n(A)$$

appelée peigne de Dirac sur $\mathbb{R}$.
i) Montrer que μ est une mesure.
ii) Montrer que c'est une mesure de Radon.

---

3. σ-algèbres (ou tribus) - tribu de Borel

Exercice 3.1. *Soit X un ensemble et soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux sous ensembles de $\mathcal{P}(X) = 2^X$ tels que $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$. Montrer que $\sigma(\mathcal{E}) \subset \sigma(\mathcal{F})$.*

Exercice 3.2 (Image réciproque d'une tribu). *Soient E et F deux ensembles et soit f une application de E dans F. Soit $\mathcal{A}$ une tribu sur F. Montrer que*

$$f^{-1}(\mathcal{A}) = \{f^{-1}(A),\ A \in \mathcal{A}\} \qquad \textit{est une tribu sur } E.$$

Exercice 3.3. *Soit X un ensemble, et soient $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ deux sous-ensembles de X. On suppose que $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}_2 \subset \sigma(\mathcal{E}_1)$. Montrer que $\sigma(\mathcal{E}_1) = \sigma(\mathcal{E}_2)$.*

Exercice 3.4. *Soit X un ensemble de cardinal infini. Soit*

$$\mathcal{A} = \{A \subset X \mid \textit{ tels que } A \textit{ fini ou } A^c \textit{ fini }\}.$$

Montrer que $\mathcal{A}$ est une σ-algèbre.

Exercice 3.5. *Soit E un ensemble infini et soit $S = \{\{x\},\ x \in E\}$. Déterminer la tribu engendrée par S (on distinguera le cas E dénombrable et le cas E non dénombrable).*

Exercice 3.6. *Soit X un ensemble. Est-ce qu'une tribu sur X est une topologie sur X ? Est-ce qu'une topologie sur X est une tribu sur X ?*

Exercice 3.7. *Soit $\mathcal{A}$ une tribu sur un ensemble X.*
i) Soient A et B deux éléments de $\mathcal{A}$. Montrer que $A \setminus B \in \mathcal{A}$ et $A \Delta B \in \mathcal{A}$ (différence symétrique).
ii) Montrer que $\mathcal{A}$ est stable par réunion finie.
iii) Soit $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$. Montrer que $\bigcap_{k=0}^{\infty} B_k \in \mathcal{A}$.

Exercice 3.8 (Un théorème du cours). *Soit μ une mesure extérieure sur un ensemble X. Montrer que l'ensemble des parties μ-mesurables est une tribu.*

Exercice 3.9. *Soit X un ensemble et soient $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ deux tribus sur X. A-t-on toujours que $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ est une tribu?*

Exercice 3.10. *Soit X un ensemble. Montrer que l'ensemble*

$$\mathcal{E} = \{B \subset X \mid B \text{ est dénombrable ou } X \setminus B \text{ est dénombrable}\}$$

est une tribu.

Exercice 3.11. *i) Soit $A \subset X$. Soit $\mathcal{E} = \{A\}$. Construire $\sigma(\mathcal{E})$, la tribu engendrée par $\mathcal{E}$.*
ii) Soit $A \subset X$ et $B \subset X$, tels que $A \cap B \neq \emptyset$, $A \cap B \notin \{A, B, X\}$. Soit $\mathcal{F} = \{A, B\}$. Construire $\sigma(\mathcal{F})$.

Exercice 3.12. *Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable, tel que $\mathcal{A}$ soit de cardinal fini ou dénombrable. On note $A(\omega)$ l'intersection des éléments de $\mathcal{A}$ (qui sont des ensembles) contenant ω:*

$$A(\omega) = \bigcap_{E_s \in \mathcal{A} \text{ tels que } \omega \in E_s} E_s \,.$$

i) On définit une relation $\sim$ sur Ω par $\omega \sim \omega'$ si $A(\omega) = A(\omega')$. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur Ω dont les classes d'équivalences $\dot{\omega}$ sont les $A(\omega)$. Vérifier que $\dot{\omega} \in \mathcal{A}$.
ii) Soit $\mathcal{C}$ la partition de $\mathcal{P}(\Omega)$ en classes d'équivalences associées à cette relation. Montrer que la tribu engendrée par $\mathcal{C}$ est $\mathcal{A}$. En déduire que la tribu $\mathcal{A}$ ne peut pas être infinie dénombrable (faire une preuve par l'absurde: montrer que $\mathcal{A}$ dénombrable infinie implique que la tribu engendrée par $\mathcal{C}$ est non dénombrable.)
iii) En déduire qu'il n'existe pas de tribu infini dénombrable.

Exercice 3.13 (Tribu engendrée par une partition).
Soit X un ensemble. Soit $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ une partition finie de X. Soit $\mathcal{A}$ défini par

$$\mathcal{A} = \left\{ \bigcup_{k\in J} A_k \mid J \subset \{1, 2, \cdots, n\} \right\}.$$

i) Montrer que $\mathcal{A}$ est une tribu
ii) Montrer que $\mathcal{A}$ est la tribu engendrée par $\mathcal{E} = \{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$.

Exercice 3.14. *Démontrer que l'ensemble suivant est un borélien de* $\mathbb{R}$*:*

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N}^*,\ |x-n| < \frac{1}{n}\}$$

Exercice 3.15. *Soit* $\mathcal{E}$ *un ensemble et soit* $\mathcal{M} = \sigma(\mathcal{E})$. *Montrer que* $\mathcal{M}$ *est la réunion des tribus engendrées par les ensembles* $\mathcal{F}$ *qui sont des sous-ensembles finis ou dénombrables de* $\mathcal{E}$*:* $\mathcal{M} = \displaystyle\bigcup_{\mathcal{F}\subset\mathcal{E};\ \mathcal{F} \text{ fini ou dénombrable}} \sigma(\mathcal{F})$.

Exercice 3.16 (L'ensemble triadique de Cantor). *Soit* f *l'application définie par*

$$f(x) = \begin{cases} 1-3x & \text{si } x < 1/2 \\ 3x-2 & \text{si } x \geqslant 1/2 \end{cases}$$

On définit de façon récurrente les ensembles $I^{(n)}$ *par* $I^{(n+1)} = f^{-1}(I^{(n)})$ *et* $I^{(0)} = [0,\,1]$.
Tracer $I^{(1)}$, $I^{(2)}$, $I^{(3)}$, *etc.*
On se basera sur la représentation géométrique obtenue dans ce qui suit.
Soit l'ensemble de Cantor triadique $\mathcal{C}$ *défini par*

$$\mathcal{C} = \cap_{n=1}^{+\infty} I^{(n)}.$$

i) Montrer que $\mathcal{C}$ *est un borélien*
ii) Montrer que $\mathcal{C}$ *est Lebesgue-négligeable*
iii) Montrer que $\mathcal{C}$ *n'est pas dénombrable (on montrera que* $\mathcal{C}$ *est en bijection avec les réels de* $[0,1]$ *dont l'écriture dans la décomposition triadique ne comporte que des* 0 *et des* 2.*)*

---

4. Mesures

Exercice 4.1. *Soit* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré. Montrer les propriétés suivantes:*
i) Si $A_1, A_2, \cdots, A_N$ *sont des éléments de* $\mathcal{A}$ *deux à deux disjoints, alors*
$\mu(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_N) = \mu(A_1) + \mu(A_2) + \cdots + \mu(A_N)$
ii) Si A *et* B *sont deux éléments de* $\mathcal{A}$ *tels que* $A \subset B$, *alors* $\mu(A) \leq \mu(B)$. *Si de plus* $\mu(A) < +\infty$ *alors* $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

Exercice 4.2. *Soit* $(X, \mathcal{A})$ *un espace mesurable. Soit* μ *une application de* $\mathcal{A}$ *dans* $\overline{\mathbb{R}}_+$. *Montrer que* μ *est une mesure positive si et seulement si on a les trois propriétés suivantes:*
i) $\mu(\emptyset) = 0$
ii) Si A *et* B *sont deux éléments disjoints de* $\mathcal{A}$, $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

iii) Pour toute suite croissante $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* $\mathcal{A}$ *on a*

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

EXERCICE 4.3. *Soit* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré et soit* $\mathcal{N}$ *l'ensemble des parties de mesure nulle:*

$$\mathcal{N} = \{N \in \mathcal{A} \mid \mu(N) = 0\}.$$

Soit

$$\overline{\mathcal{A}} = \{A \cup Z \mid A \in \mathcal{A},\ Z \subset N \in \mathcal{N}\}$$

i.e., on étend $\mathcal{A}$ *à l'aide de tous les ensembles (mesurables) de mesure nulle et ceux qui sont inclus dedans.*

Montrer

i) $\overline{\mathcal{A}}$ *est une tribu*

ii) Pour tout ensemble $A \cup Z \in \overline{\mathcal{A}}$ *on définit*

$$\overline{\mu}(A \cup Z) = \mu(A).$$

Montrer que $\overline{\mu}$ *est une fonction bien définie sur* $\overline{\mathcal{A}}$.

iii) Montrer que $\overline{\mu}$ *est une mesure sur* $(X, \overline{\mathcal{A}})$.

iv) Montrer que $\overline{\mu}$ *est l'unique mesure sur* $(X, \overline{\mathcal{A}})$ *qui coïncide avec* μ *sur* $\mathcal{A}$.

v) Montrer que $\overline{\mu}$ *est complète.*

EXERCICE 4.4. *Soit* X *un ensemble quelconque. Soit* μ *l'application définie sur* $\mathcal{P}(X)$ *par:*

$$\mu(A) = \begin{cases} \mathrm{Card}(A) & \textit{si } \mathrm{Card}(A) < +\infty \\ +\infty & \textit{sinon} \end{cases}$$

Montrer que μ *est une mesure positive. (on l'appelle mesure de comptage)*

EXERCICE 4.5. *Soit* X *un ensemble quelconque. Soit* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *une suite d'éléments distincts de* X.

i) Soit $k \in \mathbb{N}$ *fixé. Soit l'application* $\delta_{x_k} : \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}$, *telle que pour tout* $A \in \mathcal{P}(X)$,

$$\delta_{x_k}(A) = \begin{cases} 1 & \textit{si } x_k \in A \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$$

Montrer que $(X, \mathcal{P}(X), \delta_{x_k})$ *est un espace mesuré.*

ii) Soit $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *une suite de réels positifs, avec* $\alpha_0 > 0$.

Soit l'application $\mu : \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}$, *telle que pour tout* $A \in \mathcal{P}(X)$,

$$\mu(A) = \sum_{\ell\in\mathbb{N}} \alpha_\ell \delta_{x_\ell}(A).$$

Montrer que $(X, \mathcal{P}(X), \mu)$ *est un espace mesuré. Est-ce que* μ *est* σ*-finie? finie?*

Exercice 4.6. *Soit* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré et soit* $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *une suite d'ensembles de* $\mathcal{A}$.
i) Montrer

$$\mu\left(\liminf_{n\to\infty} A_n\right) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Montrer que si $\mu\left(\bigcup_k A_k\right) < +\infty$ *alors*

$$\mu\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) \geqslant \limsup_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

ii) (lemme de Borel-Cantelli) On suppose que $\sum_{n\geq 0} \mu(A_n) < \infty$. *Montrer*

$$\mu\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 0.$$

---

5. Mesure de Borel - mesure de Lebesgue

Dans ce paragraphe, on note λ^* la mesure de Lebesgue extérieure, λ la mesure de Lebesgue, et $\lambda_{\mathcal{B}}$ la mesure de Lebesgue restreinte aux boréliens.

Exercice 5.1. *Soit* $A \subset \mathbb{R}$. *Montrer que si* A *est dénombrable, alors* A *est* λ^* *négligeable. En déduire qu'aucun intervalle non vide de* $\mathbb{R}$ *n'est dénombrable.*

Exercice 5.2. *Montrer que* $[0, 1] \setminus \mathbb{Q}$ *ne contient aucun intervalle ouvert (donc est d'intérieur vide - c.f. cours de topologie) mais n'est pas Lebesgue négligeable.*

Exercice 5.3. *Soient* $a < b$. *Montrer que* $\lambda([a, b[) = \lambda(]a, b]) = \lambda([a, b]) = b - a$. *En déduire que* $\lambda(\{a\}) = 0$ *puis que tout ensemble dénombrable est de mesure de Lebesgue nulle. Soit* $\epsilon > 0$ *fixé. Montrer qu'il existe un borélien* A_ϵ *tel que* $\lambda(A_\epsilon) < \epsilon$ *et* $\mathrm{dist}(A_\epsilon, \mathbb{R}) = 0$.

Exercice 5.4. *Soit* λ *la mesure de Lebesgue sur* $\mathbb{R}$.
i) Soit U *un ouvert borné. Démontrer que* $\lambda(U) < +\infty$.
ii) Supposons que A *est un élément de la tribu de Lebesgue tel que* $\lambda(A) < \infty$. *Est-ce que* A *est nécessairement borné?*
iii) Soit $\epsilon > 0$. *Construire un ouvert* V_ϵ *dense dans* $\mathbb{R}$, *tel que* $\lambda(V_\epsilon) < \epsilon$.
iv) Soit A *un borélien de* $\mathbb{R}$. *Montrer que si* A *contient un ouvert, alors* $\lambda(A) > 0$. *La réciproque est-elle vraie?*

Exercice 5.5. *Pour* $\delta > 0$ *et pour toute partie* $A \subset \mathbb{R}$, *posons:*

$$H^1_\delta(A) = \inf\left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} |b_k - a_k| \;\middle|\; A \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty}]a_k, b_k[,\ \sup_k |b_k - a_k| < \delta \right\}.$$

Montrer que $\lim_{\delta \to 0} H^1_\delta(A) = \lambda(A)$ *(mesure de Lebesgue). Montrer, en appliquant le critère de Caratheodory (à un* H^1_δ *particulier) que la mesure de Lebesgue* λ *est borélienne.*

Exercice 5.6. *(Lemme de Borel-Cantelli: une application - c.f Exercice 4.6)*
Soit $\epsilon > 0$ *fixé. Montrer que pour Lebesgue-presque tout* $x \in [0,1]$*, il n'existe qu'un nombre fini de rationnels* p/q *tels que* $p \in \mathbb{Z}$*,* $q \in \mathbb{N}^*$*,* p *et* q *premiers entre eux, et tels que*

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^{2+\epsilon}}.$$

Pour $x \in \mathbb{R}$ *donné, le réel*

$$\alpha(x) = \sup\{\alpha \in \mathbb{R}_+ \mid \exists \text{ une infinité de } (p,q) \text{ premiers entre eux t.q. } |x - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^\alpha}\}$$

est appelé mesure de l'irrationalité de x*.*
Quelle information nous donne le résultat précédent sur la mesure d'irrationalité $\alpha(x)$ *d'un réel* $x \in [0,1]$*.*

---

6. Fonctions mesurables

Exercice 6.1. *Soit* $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ *un espace mesurable tel que* $\mathcal{A} \neq \mathcal{P}(\mathbb{R})$*.*
Soit $f : (\mathbb{R}, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{A})$ *une fonction telle que* $f \circ f$ *est mesurable.*
i) Est-ce que f *est nécessairement mesurable?*
ii) Réciproquement, si f *et* g *sont deux fonctions mesurables de* $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ *dans* $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$*, est-ce que* $f \circ g$ *est une fonction mesurable de* $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ *dans* $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$*?*

Exercice 6.2. *i) Soit* $(X, \mathcal{E})$ *ensemble mesurable et* Y *un ensemble quelconque. Soit* $f : X \to Y$ *telle que* f *soit une fonction constante. Montrer que quelle que soit la tribu choisie pour* Y*, la fonction* f *est mesurable.*
ii) Soient $(X, \mathcal{E})$ *ensemble mesurable, et* $Y = \mathbb{R}$ *muni de la tribu de Borel. Soit* $A \subset X$*. Montrer que la fonction caractéristique*

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est mesurable si et seulement si $A \in \mathcal{E}$*.*

Exercice 6.3. *i) Montrer que la fonction de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *suivante est borélienne*

$$f : x \mapsto \begin{cases} x+1 & \text{si } x > 0 \\ -x & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

ii) Montrer que la dérivée d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ *est borélienne.*
[On pourra utiliser que toute fonction continue est borélienne]

EXERCICE 6.4. *Soit* $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *une fonction monotone de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$. *Montrer que* f *est borélienne.*
[On pourra montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(]-\infty, a[)$ *est convexe].*

EXERCICE 6.5. *Soit* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré.*
Soit $f : (X, \mathcal{A}, \mu) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *une fonction* μ*-mesurable.*
Soit l'ensemble $A = \{x \in X \mid f(x) > 0\}$. *Supposons que* $\mu(A) > 0$. *Montrer qu'il existe* $\epsilon > 0$ *tel que*

$$\mu\left(\{x \in X \mid f(x) > \epsilon\}\right) > 0.$$

EXERCICE 6.6. *i) Soient* f *et* g *deux fonctions continues de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$. *Montrer que* $f = g$ λ*-p.p. si et seulement si* $f = g$.
ii) Soient f *et* g *des fonctions de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$. *Montrer que* $f = g$ δ_0*-p.p. si et seulement si* $f(0) = g(0)$.

EXERCICE 6.7. *Soit* $\mathcal{F}$ *une tribu sur un ensemble* X *et* $\emptyset \neq A \in \mathcal{F}$ *tel que:* $B \in \mathcal{F}$ *et* $B \subset A$ *implique* $B = \emptyset$ *ou* $B = A$. *Montrer que toute fonction mesurable de* X *dans* $\mathbb{R}$ *est constante sur l'ensemble* A. *En particulier si on sait de plus que* $\mathcal{F}$ *est engendrée par une partition de* X, *une fonction mesurable est constante sur chaque élément de la partition. Donner une fonction constante sur tout élément d'une partition mais qui ne soit pas mesurable.*

---

7. Calculs d'intégrales - Théorèmes de convergence

EXERCICE 7.1. *On considère la suite de fonctions*

$$f_p(x) = \left(1 - \frac{x}{p}\right)^p \mathbb{1}_{[0,p]}(x).$$

i) Pour $x > 0$ *fixé, montrer que la fonction* $\phi(y) = y \ln\left(1 - \frac{x}{y}\right)$ *est croissante sur* $]x, +\infty[$*; en déduire que la suite* $(f_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ *est une suite croissante de fonctions intégrables.*
ii) Montrer que le suite (f_p) *converge vers une fonction* f *intégrable que l'on précisera.*
iii) Montrer qu'on a l'égalité

$$\lim_{p\to+\infty} \int_{[0,p]} \left(1 - \frac{x}{p}\right)^p \sin(x)dx = \int_{[0,+\infty[} e^{-x} \sin(x)dx,$$

et calculer cette limite.

EXERCICE 7.2. *Soit* $(f_n)_{n\geqslant 1}$ *la suite de fonctions définie sur* $]0, 1]$ *par*

$$f_n(x) = nx^{n-1}(\ln(x))^2.$$

i) Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ *converge presque partout vers une fonction* f *que l'on déterminera.*
ii) Montrer que f *est intégrable sur* $]0,1]$ *et calculer* $\int_{]0,1]} f(x)dx$.

Exercice 7.3. *Rappeler le lemme de Fatou. Soit la suite de fonctions*

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Calculer

$$\liminf_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} \liminf_{n\to+\infty} f_n(x)dx.$$

Que peut-on en déduire?

Exercice 7.4. *Soit* $g_n(x) = e^{-n\sin^2(x)}h(x)$ *où* $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est Lebesgue sommable. Calculer* $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g_n(x)dx$.

Exercice 7.5. *Vérifier les hypothèses* <u>*et*</u> *les conclusions du théorème de convergence dominée pour*

i) $f_n = n\mathbb{1}_{]\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}[}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

ii) $g_n = n(n+1)\mathbb{1}_{]\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}[}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 7.6 (Retour sur l'exercice 1.4).
Soit la suite de fonctions h_n $(n \in \mathbb{N})$ *définies sur l'intervalle* $[0, 2]$ *par*

$$h_n(x) = \frac{1}{x^n + e^x}.$$

Montrer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[0,2]} h_n(x)dx = 1 - e^{-1}.$$

Exercice 7.7. *Soit* f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = e^{-x^2/2}$.
On pose $\tilde{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} \cos(xy)f(x)dx$.
i) Montrer que $\tilde{f}$ *est bien définie pour* $y \in \mathbb{R}$.
ii) Montrer que $\tilde{f}$ *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}$
iii) Montrer que $(\tilde{f})'(y) = -y\tilde{f}(y)$ *et en déduire* $\tilde{f}$.

Exercice 7.8. *i) Soit* δ_{x_0} *la mesure de Dirac au point* $x_0 = 0$. *Soit* f *une fonction définie sur* $\mathbb{R}$. *Montrer que*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)d\delta_{x_0}(x) = f(0).$$

ii) Soit $\mu = \sum_n \delta_n(x)$. *Traduire le lemme de Fatou et le théorème de convergence dominée dans le cas de la mesure* μ.