4. TD supplémentaire: suites récurrentes, suites arithmétiques et géométriques

Exercice 4.1 (Suites définies par récurrence d'ordre 1).

(1) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2 - 1/u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- *(a) Montrer par récurrence que $u_n > 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
- *(b) Montrer que la suite (u_n) est monotone.*
- *(c) Etudier sa convergence et calculer sa limite.*

(2) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- *(a) Montrer que $-1 < u_n < 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
- *(b) En supposant que la suite converge, calculer sa limite.*
- *(c) Montrer que la suite (u_n) est monotone et étudier sa convergence.*

(3) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $u_0 > 2$ et $u_{n+1} = u_n^2 + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- *(a) Montrer $u_n > 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
- *(b) En supposant que la suite converge, calculer sa limite.*
- *(c) Montrer que (u_n) est croissante et diverge vers $+\infty$.*

Exercice 4.2 (Suites récurrentes d'ordre 2 linéaires).

(1) Étudier la suite récurrente d'ordre 2 linéaire définie par

$$u_{n+2} = -u_{n+1} + 2u_n, \quad u_0 = 0,\ u_1 = 3$$

Réponse: À partir de l'étude de l'équation caractéristique associée, on trouve $u_n = 1 - (-2)^n$.

(2) Étudier la suite récurrente d'ordre 2 linéaire définie par

$$u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n, \quad u_0 = 5,\ u_1 = 6$$

Réponse: À partir de l'étude de l'équation caractéristique associée, on trouve $u_n = 3^n(-3n + 5)$.

(3) Étudier la suite récurrente d'ordre 2 linéaire définie par

$$u_{n+2} = 9u_n, \quad u_0 = 5,\ u_1 = 1$$

Réponse: À partir de l'étude de l'équation caractéristique associée, on trouve $u_n = 5 \times 3^n \cos(n\frac{\pi}{2}) + \frac{1}{3} \times 3^n \sin(n\frac{\pi}{2})$.

Exercice 4.3 (Suites arithmétiques et géométriques). *Dire si les suites ci-dessous sont arithmétiques, géométriques ou ni l'une ni l'autre.*

(1) $u_n = 5 - 4n$.
(2) $v_n = n^2 + 1$
(3) $w_n = 3 \times 7^n$

Exercice 4.4 (Suites arithmétiques et géométriques). *(1) Soit la suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_5 = 7$ et $u_9 = 19$. Déterminer la raison et le premier terme de la suite. Exprimer u_n en fonction de n. Que vaut $\sum_{n=0}^{12} u_i$?*
Réponse: On trouve que la raison est $r = 3$ et le premier terme est $u_0 = -8$. Et on a donc $u_n = 3n - 8$. On a $\sum_{i=0}^{12} u_i = (12 + 1)\frac{2u_0 + 12\times 3}{2}$

(2) Soit la suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_3 = 8$ et $u_5 = 1/32$. Calculer sa raison. Donner, sous la forme d'une fraction $\sum_{i=0}^{9} u_i$.