Université du Sud Toulon-Var

Master Enseignement **1**$^{\text{ère}}$ année

TD 8 - Vecteurs aléatoires

$\boxed{\text{Le cours}}$

- **Vecteurs aléatoires**

Dans ce paragraphe $\mathfrak{A}$ sera une tribu sur (un sous-ensemble de) $\mathbb{R}$ et $\mathfrak{A}_d$ sera la tribu engendrée par $\underbrace{\mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \times ... \times \mathfrak{A}}_{d \text{ fois}}$. Dans le cas de variables aléatoires continues, on prendra la tribu de Borel $\mathfrak{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{B}(I)$ (où I est un intervalle) et $\mathfrak{A}_d$ sera la tribu de Borel sur $\mathbb{R}^d$ (ou sur I^d). Dans le cas discret, $\mathfrak{A}$ sera l'ensemble des parties de U où U est un sous-ensemble fini ou dénombrable de $\mathbb{R}$.

Définition. Soit $(\Omega,\, \mathfrak{F},\, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Toute fonction borélienne

$$X = (X_1,\, X_2,\, ...,\, X_d) : \begin{array}{lcl} (\Omega,\, \mathfrak{F},\, \mathbb{P}) & \to & (\mathbb{R}^d,\, \mathfrak{A}_d) \\ \omega & \mapsto & (X_1(\omega),\, X_2(\omega),\, ...,\, X_d(\omega)) \end{array}$$

est appelée vecteur aléatoire (pour $d > 1$).

Définition. Soit $X = (X_1,\, X_2,\, ...,\, X_d)$ un vecteur aléatoire. La **loi de** X, appelée aussi **loi jointe** de X_1, ..., X_d est la probabilité notée $\mathbb{P}_X$ définie sur $\mathfrak{A}_d$ par

$$\forall B \in \mathfrak{A}_d, \quad \mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}((X_1,\, X_2,\, ...,\, X_d) \in B)$$

En particulier, pour $B_1,\, B_2,\, ...,\, B_d \in \mathfrak{A}$,

$$\mathbb{P}_X(B_1 \times B_2 \times ... \times B_d) = \mathbb{P}(X_1 \in B_1,\, X_2 \in B_2,\, ...X_d \in B_d)$$

Pour g fonction mesurable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, on a (si la quantité suivante est bien définie).

$$\mathbb{E}(g(X,Y)) = \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} g(x,\, y)\, f_X(x,\, y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$$

Définition : Covariance - Matrice de variance-covariance.

- Soient X et Y deux variables aléatoires réelles de carré intégrable (i.e., $\mathbb{E}(X^2) < \infty$ et $\mathbb{E}(Y^2) < \infty$). La **covariance** de X et Y est

$$\mathrm{Cov}(X,\, Y) = \mathbb{E}\big((X - \mathbb{E}(X))\,(Y - \mathbb{E}(Y))\big)\,.$$

On montre aisément

$$\mathrm{Cov}(X,\, Y) = \mathbb{E}(XY)) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)\,.$$

- Soit $X = (X_1,\, X_2,\, ...,\, X_d)$ un vecteur aléatoire de carré intégrable (i.e., pour tout i, $\mathbb{E}(X_i^2) < \infty$). La **matrice de variance-covariance** de X est la matrice

$$\Sigma_X = \left(\mathrm{Cov}(X_i,\, X_j)\right)_{i,j=1,..d}\,.$$

Deux variables aléatoires X_1 et X_2 sont non corrélées si la matrice de variance-covariance de $X = (X_1,\, X_2)$ est diagonale. Si X_1 et X_2 sont indépendantes, alors elles sont non corrélées. La réciproque est fausse en général (voir Exercice 3).

Définition. Soit $X = (X_1,\, X_2,\, ...,\, X_d)$ un vecteur aléatoire. On appelle **lois marginales** de X, les lois de tous les r-uplets $(X_{i_1},\, X_{i_2},\, ...,\, X_{i_r})$, pour $1 \leq i_1 < i_2... < i_r \leq d$ et $r < d$.

Si $X = (X_1,\, X_2)$ est un couple aléatoire, les lois marginales de X sont la loi de X_1 et la loi de X_2.

La loi de X_1 est déterminée à partir de la loi de $(X_1,\, X_2)$ par

$$\forall B \in \mathfrak{A}, \quad \mathbb{P}_{X_1}(B) = \mathbb{P}(X_1 \in B,\, X_2 \in \mathbb{R}) = \mathbb{P}_{(X_1,\, X_2)}(B \times \mathbb{R})\,.$$

On a de même pour la loi de X_2.

Définition. - Un vecteur aléatoire $X = (X_1,\, X_2,\, ...,\, X_d)$ est **discret** si l'ensemble des valeurs prises est fini ou dénombrable (avec probabilité 1), i.e., il existe A fini ou dénombrable tel que $\mathbb{P}_X(A) = 1$.

- Un vecteur aléatoire $X = (X_1,\, X_2,\, ...,\, X_d)$ est à densité s'il existe une fonction mesurable f_X de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$, positive, d'intégrale égale à 1, et telle que

$$\mathbb{P}_X(B) = \int_B f_X(x_1,\, x_2,\, ...,\, x_d)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2...\mathrm{d}x_d\,.$$

Proposition. - Si $(X_1,\, X_2)$ est un vecteur aléatoire à densité, de densité $f_X(x_1,\, x_2)$ alors les lois marginales de X_1 (respectivement de X_2) est à densité, de densités

$$f_{X_1}(x) = \int_R f_X(x,\, x_2)\mathrm{d}x_2\,,$$

respectivement

$$f_{X_2}(x) = \int_R f_X(x_1,\, x)\mathrm{d}x_1\,.$$

- Soit $X = (X_1,\, X_2)$ un vecteur aléatoire à densité f_X. Alors

$$X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont indépendants} \quad \Leftrightarrow \quad f_X(x_1,\, x_2) = f_{X_1}(x_1)\, f_{X_2}(x_2)\,.$$

- **Somme de variables aléatoires**
Proposition. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires telles que $X = (X_1,\, X_2)$ a pour densité f_X (de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$). Alors $X_1 + X_2$ est une variable aléatoire à densité $f_{X_1+X_2}$ (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) définie par

$$f_{X_1+X_2}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z - x_2,\, x_2)\mathrm{d}x_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1,\, z - x_1)\mathrm{d}x_1\,.$$

Dans le cas où X_1 et X_2 sont indépendantes, on obtient

$$f_{X_1+X_2}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(z - x_2)f_{X_2}(x_2)\mathrm{d}x_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(z - x_1)\mathrm{d}x_1\,.$$

La preuve de ce résultat utilise la propriété $\mathbb{P}(Z \in A) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A)$, où Z est une variable aléatoire réelle, et $\mathbb{1}_A$ est la fonction indicatrice de l'ensemble A. On utilise ensuite le théorème de transfert appliqué à la fonction du couple de variables aléatoires $g((X,\, Y))$, où g est la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(x,\, y) = \mathbb{1}_{\{(x,\,y)\ |\ x+y\in A\}}(x,\, y)$.

- **Vecteurs gaussiens** (*Complément de cours ; on ne résoudra pas le TD sur cette partie*)
Définition. Une variable aléatoire réelle X suit une loi normale (ou loi Gaussienne centrée réduite), notée $\mathcal{N}(0,\, 1)$ si la loi de X est à densité

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,.$$

Une variable aléatoire réelle Y suit la loi normale (ou loi gaussienne) de paramètres (m, σ), notée $\mathcal{N}(m, \sigma)$, si $(Y-m)/\sigma \sim \mathcal{N}(0, 1)$, i.e., si la loi de Y est à densité

$$f_Y(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\,.$$

Si $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, alors sa fonction caractéristique $\phi_X(t) := \mathbb{E}(\mathrm{e}^{itX})$ vérifie

$$\phi_X(t) = \mathrm{e}^{-t^2/2}\,. \tag{1}$$

En particulier, on a

$$\mathbb{E}(X^{2k+1}) = 0, \quad \mathbb{E}(X^{2k}) = \frac{(2k)!}{2^k k!}, \quad k \in \mathbb{N}\,. \tag{2}$$

(c.f. Exercice 8 pour la preuve de (1) et (2)).

Pour $Y \sim \mathcal{N}(m, \sigma)$, on a

$$\phi_Y(t) = \mathrm{e}^{itm - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}\,. \tag{3}$$

Définition. Soit X un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. On dit que $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ est un vecteur gaussien si toute combinaison linéaire de ses composantes X_1, X_2, $\cdots$, X_n est une variable aléatoire réelle gaussienne.

Si X est une vecteur gaussien, alors, pour tout $i = 1, \cdots, n$, X_i est une variable aléatoire réelle gaussienne. La réciproque est fausse en général, c.f Exercice 9.

Définitions - Proposition. Soit X un vecteur gaussien de $\mathbb{R}^n$, d'espérance

$$\mathbb{E}(X) = \begin{pmatrix} \mathbb{E}(X_1) \\ \mathbb{E}(X_2) \\ \vdots \\ \mathbb{E}(X_n) \end{pmatrix}$$

et de matrice de variance-covariance

$$\Sigma = (\Sigma_{ij}) = (\mathrm{Cov}(X_i, X_j)) = (\mathbb{E}(X_i X_j) - \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j))\,.$$

La fonction caractéristique $\phi_X(t) := \mathbb{E}(\mathrm{e}^{i\langle t, X\rangle})$ de X est alors donnée par

$$\phi_X(t) = \exp\left(i\langle t, \mathbb{E}(X)\rangle - \frac{1}{2} t^* \Sigma t\right), \quad t \in \mathbb{R}^n, \tag{4}$$

où $*$ signifie transposition (et conjugaison complexe, mais inutile ici), et $\langle\, .\, ,\ .\, \rangle$ est le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^n$. Pour la démonstration de (4), c.f Exercice 10.

Ceci implique en particulier qu'un vecteur gaussien X est entièrement déterminé par son espérance et sa matrice de covariance.

Proposition. Soit X un vecteur gaussien de $\mathbb{R}^n$. Les composantes de X sont indépendantes si et seulement si la matrice de covariance de X est diagonale.

Remarque : Cette propriété est fausse en général si le vecteur aléatoire X n'est pas gaussien.

Les exercices

Vecteurs aléatoires - Lois marginales

Exercice 1. On lance deux dés parfaitement symétriques. Soient X et Y les points obtenus sur chacun des deux dés. On pose $Z = |X - Y|$ et $T = \max(X, Y)$. Donner la loi du couple (Z, T) et préciser les lois marginales Z et T. Calculer $\mathbb{E}(Z)$, $\mathbb{E}(T)$ et $\mathrm{Cov}(Z, T)$.

Exercice 2. Soit $\lambda \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$. Soit N la variable aléatoire égale au nombre de clients d'un marchand de fruits et légumes un jour donné. On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre λ et que chaque client achète soit des fruits, soit des légumes (ce qui suppose qu'un client donné ne peut acheter à la fois des fruits et des légumes). La probabilité qu'un client achète des fruits est p, et la probabilité qu'il achète des légumes est $q = 1 - p$. On suppose de plus que les achats des différents clients sont indépendants.

Soient X la variable aléatoire égale au nombre de clients achetant des fruits et Y la variable aléatoire égale au nombre de clients achetant des légumes.
i) Pour i et j dans $\mathbb{N}$, déterminer la probabilité conditionnelle

$$\mathbb{P}_{\{N=i+j\}}(X = i)\,.$$

ii) Montrer que la loi conjointe de $(X,\, Y)$ est déterminée par :

$$\mathbb{P}(X = i,\, Y = j) = \frac{(\lambda p)^i}{i!}\frac{(\lambda q)^j}{j!}\mathrm{e}^{-\lambda}\,.$$

(On pensera à utiliser dans le calcul le fait que $X + Y = N$)
iii) Déterminer les lois marginales de X et Y.
iv) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ? En déduire $\mathrm{Cov}(X,\, Y)$ et $\mathbb{E}(XY)$.

Exercice 3. *(Indépendance et covariance)* Soit X une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(0,\, 1)$ et soit $Y = X(X-1)$. Montrer que X et Y ne sont pas indépendantes. Montrer que $\mathrm{Cov}(X,\, Y) = 0$.

Exercice 4. Soient X et Y deux variables aléatoires telles que la densité du couple $(X,\, Y)$ est donnée par h, avec

$$h(x,y) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-y} & \text{si } 0 < x < y \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

i) Vérifier que h est une densité de probabilité.
ii) Calculer les densités marginales f de X et g de Y.
iii) Est-ce que X et Y sont indépendantes ?
iv) Calculer $P\left\{\dfrac{X}{Y} \leq z \text{ et } Y \leq t\right\}$; en déduire la loi de $\dfrac{X}{Y}$.
v) Est-ce que X/Y et Y sont des variables aléatoires indépendantes ?

Exercice 5. Le couple de variables aléatoires $(X,\, Y)$ a pour densité jointe f définie par

$$f(x,\, y) = \frac{4}{5}(x + 3y)\mathrm{e}^{-x-2y}\mathbb{1}_{[0,\, +\infty[}(x)\mathbb{1}_{[0,\, +\infty[}(y)\,.$$

Vérifier que f est bien une densité. Calculer la densité de X et celle de Y. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ? Calculer $\mathbb{E}(XY)$.

Somme de variables aléatoires

Exercice 6. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes et qui suivent toutes les deux la loi uniforme sur $[0,1]$.

Soient Y_1 et Y_2 deux variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes les deux une loi exponentielle de paramètre 1.
i) Déterminer la loi du couple (X_1, X_2) et la loi du couple (Y_1, Y_2).
ii) Déterminer la loi de $X_1 + X_2$. Déterminer la loi de $X_1 - X_2$. Déterminer la loi de $Y_1 + Y_2$.

Exercice 7. *Application :* Deux amis ont rendez-vous à midi ; Des causes de retard indépendantes font que chacun arrive entre 12h et 13h. La probabilité d'arrivée de chacun d'eux dans un intervalle de temps donné étant proportionnelle à la longueur de cet intervalle, quelle est la probabilité que les deux amis se rencontrent si chacun attend au plus 1/4 d'heure (On pourra construire deux variables aléatoires réelles continues indépendantes X_1 et X_2 qui donnent respectivement le temps de retard de chacun des deux amis).

Vecteurs gaussiens

Exercice 8. Soit $X \sim \mathcal{N}(0,\, 1)$. Etablir pour $t \in \mathbb{R}$, $\phi'_X(t) = -t\phi_X(t)$. En déduire (1). Utiliser ce résultat pour en déduire (2).

Exercice 9. Soient U et V deux variables aléatoires réelles indépendantes respectivement de loi normale $\mathcal{N}(0,\, 1)$ et de loi de Bernouilli $\mathcal{B}(1,\, 1/2)$. On pose $X_1 = U$ et $X_2 = U 1\!\!1_{\{V=0\}} - U 1\!\!1_{\{V=1\}}$. Montrer que les variables aléatoires réelles X_1 et X_2 suivent une loi normale, mais que $X_1 + X_2$ ne suit pas une loi normale.

Exercice 10. Soit X un vecteur gaussien de $\mathbb{R}^n$ d'espérance $\mathbb{E}(X)$ et de matrice de covariance Σ. Soit $t = (t_1,\, t_2,\, \cdots,\, t_n) \in \mathbb{R}^n$.
i) Pourquoi $Y = t_1X_1 + t_2X_2 + \cdots + t_nX_n$ est-elle une variable aléatoire réelle gaussienne ?
ii) Montrer $\mathbb{E}(Y) = \langle t,\, \mathbb{E}(X)\rangle$.
iii) Soit $Z = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix}$ un vecteur aléatoire réel, pas nécessairement gaussien. Montrer

$$\mathrm{Var}(Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(Z_i) + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} \mathrm{Cov}(Z_i,\, Z_j)\,.$$

En déduire

$$\mathrm{Var}(Y) = t^* \Sigma\, t\,.$$

iv) A l'aide de ce qui précède, et de (3), montrer que la fonction caractéristique de X vérifie (4).